

# Un método de cálculo sísmico aproximado de estructuras planas de edificación<sup>(\*)</sup>

Por LUIS MORENO  
y AVELINO SAMARTIN

Departamento de Análisis de las Estructuras  
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad de Cantabria

*Se presentan las expresiones explícitas de las frecuencias y modos de vibración de un edificio homogéneo y regular. A efectos prácticos se propone una fórmula de interpolación de las frecuencias para casos intermedios entre las situaciones de viga de cortante y viga de flexión.*

*Los resultados obtenidos permiten su extensión al análisis de estructuras, entramados planos irregulares y heterogéneos, mediante la utilización de la técnica de Ritz. Se presentan algunos ejemplos de la eficiencia y aproximación del método.*

## 1. INTRODUCCION

El análisis dinámico de estructuras de edificación sometidas a la acción de un terremoto, suele efectuarse introduciendo hipótesis plausibles que reducen de un modo considerable el esfuerzo de cálculo. Es usual, la utilización del modelo de viga de cortante, (figura 1 a), que supone masas concentradas en los pisos con rigidez a flexión infinita. De esta forma, el número de grados de libertad (gdl) que permiten describir el comportamiento dinámico de la estructura se reduce al número N de pisos. Existen situaciones en las que este tipo de hipótesis no es adecuada, edificios con forjados flexibles y soportes rígidos, y por consiguiente, se

deben representar de un modo más adecuado por el modelo estructural totalmente opuesto al anterior, denominado viga de flexión (figura 1 b). Evidentemente las estructuras reales se comportarán de un modo intermedio entre los previstos en los dos modelos límites anteriores (figura 1 c).

En una reciente publicación (1) se han obtenido las soluciones explícitas para cada uno de los tres tipos de modelos anteriores, y que permiten describir el comportamiento dinámico de estructuras pórticos regulares de aparición frecuente en la edificación. Es posible extender los resultados anteriores a otros pórticos con distribución irregular de rigideces y masas, mediante procedimientos aproximados de diseño, y que se comentan más adelante.

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de agosto de 1987.



Figura 1.—Modelo de estructuras porticadas.

## 2. CALCULO SISMICO DE ESTRUCTURAS HOMOGENEAS DE EDIFICACION

Se considera como estructuras homogéneas de edificación la representada en la figura 2. En ella se observa que los pisos tienen igual masa total. Las inercias y luces de los dinteles son idénticos entre sí. Respecto a los soportes se suponen que las rigideces de los exteriores son la mitad de los interiores, de modo que en cada nudo la rigidez a flexión del dintel es una proporción constante de la de los soportes.

En la citada publicación (1) se han obtenido las expresiones explícitas en este tipo de estructuras de las frecuencias  $\omega_n$  y modos de vibración  $\phi_n$  en función del número de pisos (N), relación de rigideces a flexión entre un viga del dintel y pilar en un nudo ( $\lambda = R/R_1$ ) y de la constante  $\sqrt{k/m}$ , k y m la rigidez al desplazamiento transversal y masa de una planta.

Si las barras de la estructura son de sección variable pero simétrica, es decir, definidas las vigas de los dinteles por las constantes R y  $\gamma$  y la de los pilares por  $R_1$  y  $\gamma_1$ , los parámetros adimensionales siguientes rigen asimismo la respuesta sísmica de estas construcciones:

$$\nu_1 = \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1}; \quad \nu_2 = \frac{1 + \lambda(1 + \gamma)}{1 + \gamma_1};$$

$$\nu_3 = \frac{\lambda(1 + \gamma)}{1 - \gamma_1} \quad [2.1]$$

En el caso usual de sección constante, que se muestra en la figura 2, se obtienen los valores para las constantes anteriores:

$$\lambda = \frac{l/l}{I_1/h}; \quad k = \frac{12 EI}{h^3} M$$

$$\nu_1 = \frac{1}{3}; \quad \nu_2 = \frac{2 + 3\gamma}{3}$$

$$\nu_3 = 3\gamma \quad [2.2]$$

con M el número de vanos del dintel.

Si bien las fórmulas explícitas desarrolladas en (1) permiten obtener con un mínimo esfuerzo de cálculo las características dinámicas de estas estructuras, es posible una reducción adicional mediante la confección de unas tablas correspondientes a los casos límites  $\lambda = 0$  y  $\lambda = \infty$ , y una fórmula de interpolación para las situaciones extremas. Se supone en lo que sigue sección constante en vigas y pilares.

En la tabla 1 se indica los valores adimensionales  $\bar{\omega} = \omega \sqrt{m/k}$  de las frecuencias de estas estructuras de edificación desde N=1 a N=10 plantas y correspondientes a los casos extremos  $\lambda = 0$  (viga de flexión) y  $\lambda = \infty$  (viga de corte).

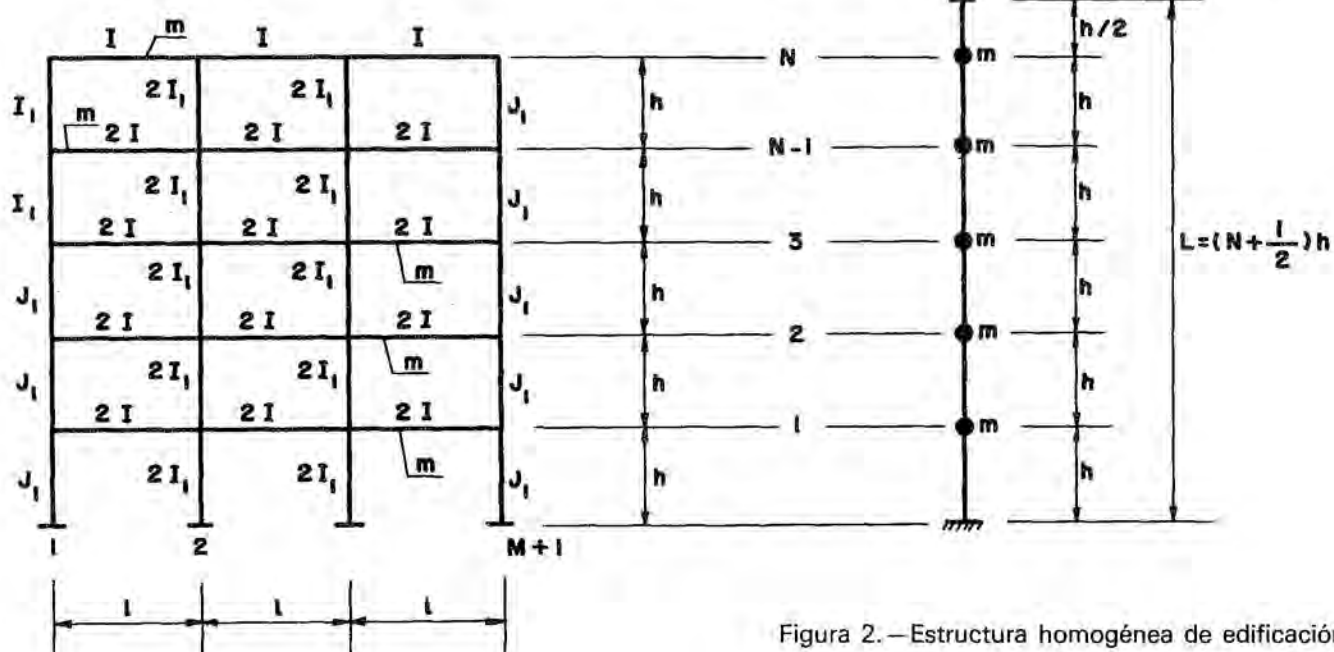


Figura 2.—Estructura homogénea de edificación.

# METODO DE CALCULO SISMICO APROXIMADO DE ESTRUCTURAS PLANAS DE EDIFICACION

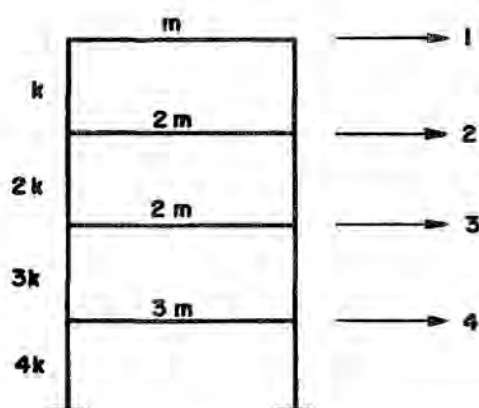


Figura 3. — Estructura viga de corte no homogénea.  
(Ref.2)

En las tablas 2 y 3 se presentan respectivamente los tres primeros modos y fuerzas estáticas equivalentes correspondientes a los casos anteriores. Las fuerzas estáticas equivalentes se han determinado para un valor unidad de la ordenada del espectro de aceleraciones correspondiente el armónico que se considera.

Para una estructura de edificación regular con un valor de  $\lambda$  entre los dos extremos anteriores, es posible obtener la frecuencia  $\bar{\omega}$  mediante la fórmula aproximada de interpolación siguiente:

$$\bar{\omega} = (1 - e^{-\beta \sqrt{\lambda}}) \bar{\omega}_{\infty} + e^{-\beta \sqrt{\lambda}} \bar{\omega}_0 \quad [2.3]$$

TABLA I

FRECUENCIAS  $\bar{\omega} = \frac{\omega}{(\sqrt{k/m})}$  EN EDIFICIOS REGULARES

NO. DE PISOS	ARMONICOS	Modelo de viga de corte ( $\lambda = \infty$ )										Modelo de viga de flexión ( $\lambda = 0$ )									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	MOD. DISCRETO	1.000										0.500									
	MOD. CONTINUO	1.047										0.451									
	RELACION D/C	0.955										1.109									
2	MOD. DISCRETO	0.618	1.618									0.169	1.123								
	MOD. CONTINUO	0.628	1.685									0.162	1.018								
	RELACION D/C	0.984	0.858									1.039	1.103								
3	MOD. DISCRETO	0.445	1.247	1.802								0.084	0.553	1.486							
	MOD. CONTINUO	0.449	1.346	2.244								0.083	0.519	1.454							
	RELACION D/C	0.992	0.926	0.803								1.019	1.065	1.022							
4	MOD. DISCRETO	0.347	1.000	1.532	1.879							0.051	0.327	0.923	1.662						
	MOD. CONTINUO	0.349	1.047	1.745	2.443							0.050	0.314	0.880	1.724						
	RELACION D/C	0.995	0.955	0.878	0.769							1.013	1.040	1.049	0.964						
5	MOD. DISCRETO	0.285	0.831	1.310	1.683	1.919						0.034	0.216	0.612	1.183	1.761					
	MOD. CONTINUO	0.286	0.857	1.428	1.999	2.570						0.034	0.210	0.589	1.154	1.907					
	RELACION D/C	0.997	0.970	0.917	0.842	0.747						1.008	1.027	1.040	1.025	0.923					
6	MOD. DISCRETO	0.241	0.709	1.136	1.497	1.771	1.942					0.024	0.154	0.434	0.852	1.365	1.821				
	MOD. CONTINUO	0.242	0.725	1.208	1.692	2.175	2.658					0.024	0.151	0.422	0.826	1.366	2.040				
	RELACION D/C	0.998	0.978	0.940	0.885	0.814	0.731					1.006	1.020	1.030	1.031	0.999	0.893				
7	MOD. DISCRETO	0.209	0.618	1.000	1.338	1.618	1.827	1.956				0.018	0.115	0.324	0.637	1.045	1.495	1.862			
	MOD. CONTINUO	0.209	0.628	1.047	1.466	1.885	2.304	2.723				0.018	0.113	0.317	0.620	1.026	1.532	2.140			
	RELACION D/C	0.998	0.984	0.955	0.913	0.858	0.793	0.719				1.004	1.015	1.023	1.027	1.018	0.975	0.870			
8	MOD. DISCRETO	0.185	0.547	0.891	1.205	1.478	1.700	1.865	1.966			0.014	0.089	0.251	0.494	0.816	1.198	1.589	1.890		
	MOD. CONTINUO	0.185	0.554	0.924	1.294	1.663	2.033	2.402	2.772			0.014	0.088	0.247	0.483	0.799	1.193	1.666	2.218		
	RELACION D/C	0.999	0.987	0.965	0.932	0.889	0.837	0.776	0.709			1.004	1.012	1.018	1.023	1.021	1.004	0.954	0.852		
9	MOD. DISCRETO	0.165	0.491	0.803	1.094	1.355	1.578	1.759	1.892	1.973		0.011	0.071	0.200	0.394	0.652	0.968	1.320	1.660	1.910	
	MOD. CONTINUO	0.165	0.496	0.827	1.157	1.488	1.819	2.150	2.480	2.811		0.011	0.070	0.197	0.387	0.639	0.955	1.334	1.776	2.281	
	RELACION D/C	0.999	0.990	0.972	0.945	0.910	0.868	0.818	0.763	0.702		1.003	1.009	1.015	1.019	1.020	1.013	0.989	0.935	0.837	
10	MOD. DISCRETO	0.149	0.445	0.731	1.000	1.247	1.466	1.652	1.802	1.911	1.978	0.009	0.058	0.163	0.322	0.533	0.794	1.096	1.418	1.714	1.925
	MOD. CONTINUO	0.150	0.449	0.748	1.047	1.346	1.646	1.945	2.244	2.543	2.842	0.009	0.058	0.162	0.317	0.523	0.782	1.092	1.454	1.867	2.332
	RELACION D/C	0.999	0.992	0.977	0.955	0.926	0.891	0.850	0.803	0.751	0.696	1.002	1.007	1.012	1.016	1.018	1.016	1.004	0.975	0.918	0.825

**TABLA II a**

**MODOS DE VIBRACION EN EDIFICIOS REGULARES. PRIMER MODO.**

NO. DE PISOS	COMPONENTES	Modelos de viga corte ( $\lambda = \infty$ )										Modelo de viga de flexión ( $\lambda = 0$ )									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	MOD. DISCRETO	1.000										1.000									
	MOD. CONTINUO	1.000										0.893									
	RELACION D/C	1.000										1.120									
2	MOD. DISCRETO	0.526	0.851									0.305	0.952								
	MOD. CONTINUO	0.526	0.851									0.291	0.918								
	RELACION D/C	1.000	1.000									1.050	1.038								
3	MOD. DISCRETO	0.328	0.591	0.737								0.137	0.465	0.875							
	MOD. CONTINUO	0.328	0.591	0.737								0.133	0.455	0.859							
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000								1.026	1.023	1.018							
4	MOD. DISCRETO	0.228	0.429	0.577	0.657							0.075	0.265	0.522	0.807						
	MOD. CONTINUO	0.228	0.429	0.577	0.657							0.074	0.261	0.516	0.799						
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000							1.016	1.015	1.013	1.011						
5	MOD. DISCRETO	0.170	0.326	0.456	0.549	0.597						0.046	0.167	0.339	0.539	0.751					
	MOD. CONTINUO	0.170	0.326	0.456	0.549	0.597						0.045	0.165	0.336	0.535	0.746					
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000						1.011	1.010	1.009	1.008	1.007					
6	MOD. DISCRETO	0.133	0.258	0.368	0.457	0.519	0.551					0.031	0.113	0.234	0.379	0.539	0.705				
	MOD. CONTINUO	0.133	0.258	0.368	0.457	0.519	0.551					0.030	0.112	0.232	0.377	0.536	0.701				
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000					1.008	1.007	1.007	1.006	1.006	1.005				
7	MOD. DISCRETO	0.107	0.210	0.304	0.384	0.447	0.491	0.514				0.022	0.081	0.169	0.278	0.401	0.532	0.666			
	MOD. CONTINUO	0.107	0.210	0.304	0.384	0.447	0.491	0.514				0.021	0.080	0.168	0.277	0.399	0.530	0.663			
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000				1.006	1.006	1.005	1.005	1.005	1.004	1.004			
8	MOD. DISCRETO	0.089	0.175	0.255	0.327	0.387	0.434	0.467	0.483			0.016	0.060	0.127	0.211	0.307	0.412	0.521	0.632		
	MOD. CONTINUO	0.089	0.175	0.255	0.327	0.387	0.434	0.467	0.483			0.016	0.060	0.126	0.210	0.306	0.411	0.520	0.630		
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000			1.005	1.005	1.004	1.004	1.004	1.003	1.003	1.003		
9	MOD. DISCRETO	0.076	0.149	0.218	0.282	0.338	0.384	0.420	0.445	0.457		0.012	0.046	0.098	0.164	0.241	0.326	0.416	0.509	0.603	
	MOD. CONTINUO	0.076	0.149	0.218	0.282	0.338	0.384	0.420	0.445	0.457		0.012	0.046	0.097	0.163	0.240	0.325	0.415	0.508	0.602	
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		1.004	1.004	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.002	1.002	
10	MOD. DISCRETO	0.065	0.129	0.189	0.246	0.297	0.341	0.378	0.406	0.425	0.435	0.009	0.036	0.077	0.130	0.193	0.263	0.338	0.417	0.497	0.578
	MOD. CONTINUO	0.065	0.129	0.189	0.246	0.297	0.341	0.378	0.406	0.425	0.435	0.009	0.036	0.077	0.130	0.193	0.263	0.338	0.416	0.496	0.577
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002

El valor de  $\beta$  se puede estimar si se conocen las frecuencias  $\bar{\omega}_1$  de las estructura con  $\lambda = 1$ , usando la fórmula:

$$\beta = \ln \frac{\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_\infty}{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_\infty} \quad [2.4]$$

En la tabla 4 se muestran los valores de  $\beta$  para los distintos armónicos y estructuras caracterizados por su número de pisos. Se observa que  $\beta$  esta comprendido en el rango 1.00 a 1.30 por lo que un valor de  $\beta = 1.15$  conduce a resultados adecuados en un primer tanteo.

Una vez obtenido el valor de  $\omega = \bar{\omega} \sqrt{k/m}$  correspondiente a un  $\lambda$ , comprendido entre los dos

límites anteriores  $(0, \infty)$ , se calculan los modos de vibración mediante las siguientes fórmulas deducidas en el apéndice I:

$$\phi_{nj} = A (\text{Ch } \alpha_1 j - \cos \alpha_2 j) - \lambda_2 \text{Sh } \alpha_1 j + \lambda_1 \text{sen } \alpha_2 j \quad [2.5]$$

siendo:

$$A_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 [B_1 - B_2 - 2 \nu_3 (C_N - c_N)]}{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - 2 \nu_3 (\lambda_1 S_N + \lambda_2 s_N)} \quad [2.5a]$$

con

$$S_N = \text{Sh } N \alpha_1; \quad C_N = \text{Ch } N \alpha_1;$$



TABLA II b

MODOS DE VIBRACION EN EDIFICIOS REGULARES. Modo 2.

NO. DE PISOS	COMPONENTES	Modelos de viga corte ( $\lambda = \infty$ )										Modelo de viga de flexión ( $\lambda = 0$ )									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	MOD. DISCRETO	0.851	-0.526									0.952	-0.307								
	MOD. CONTINUO	0.851	-0.526									0.865	-0.089								
	RELACION D/C	1.000	1.000									1.101	3.469								
3	MOD. DISCRETO	0.737	0.328	-0.591								0.574	0.682	-0.453							
	MOD. CONTINUO	0.737	0.328	-0.591								0.531	0.685	-0.347							
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000								1.082	0.995	1.307							
4	MOD. DISCRETO	0.577	0.577	-0.000	-0.577							0.350	0.693	0.376	-0.505						
	MOD. CONTINUO	0.577	0.577	-0.000	-0.577							0.333	0.674	0.399	-0.445						
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000							1.053	1.029	0.945	1.135						
5	MOD. DISCRETO	0.456	0.597	0.326	-0.170	-0.549						0.229	0.559	0.580	0.167	-0.521					
	MOD. CONTINUO	0.456	0.597	0.326	-0.170	-0.549						0.221	0.545	0.577	0.188	-0.483					
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000						1.036	1.026	1.004	0.885	1.078					
6	MOD. DISCRETO	0.368	0.551	0.457	0.133	-0.258	-0.519					0.159	0.434	0.571	0.433	0.028	-0.522				
	MOD. CONTINUO	0.368	0.551	0.457	0.133	-0.258	-0.519					0.155	0.425	0.564	0.437	0.046	-0.496				
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000					1.026	1.021	1.012	0.991	0.616	1.051				
7	MOD. DISCRETO	0.304	0.491	0.491	0.304	-0.000	-0.304	-0.491				0.115	0.338	0.505	0.506	0.303	-0.065	-0.516			
	MOD. CONTINUO	0.304	0.491	0.491	0.304	-0.000	-0.304	-0.491				0.113	0.332	0.499	0.504	0.309	-0.051	-0.498			
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000				1.020	1.017	1.012	1.004	0.981	1.269	1.036			
8	MOD. DISCRETO	0.255	0.434	0.483	0.387	0.175	-0.089	-0.327	-0.467			0.086	0.267	0.432	0.497	0.419	0.197	-0.130	-0.507		
	MOD. CONTINUO	0.255	0.434	0.483	0.387	0.175	-0.089	-0.327	-0.467			0.085	0.263	0.427	0.494	0.420	0.204	-0.118	-0.493		
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000			1.016	1.014	1.011	1.006	0.998	0.968	1.095	1.027		
9	MOD. DISCRETO	0.218	0.384	0.457	0.420	0.282	0.076	-0.149	-0.338	-0.445		0.067	0.214	0.365	0.459	0.453	0.334	0.114	-0.175	-0.496	
	MOD. CONTINUO	0.218	0.384	0.457	0.420	0.282	0.076	-0.149	-0.338	-0.445		0.066	0.211	0.362	0.455	0.452	0.336	0.120	-0.166	-0.486	
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		1.013	1.011	1.010	1.007	1.003	0.994	0.952	1.053	1.021	
10	MOD. DISCRETO	0.189	0.341	0.425	0.425	0.341	0.189	-0.000	-0.189	-0.341	-0.425	0.053	0.174	0.309	0.411	0.446	0.396	0.258	0.049	-0.207	-0.484
	MOD. CONTINUO	0.189	0.341	0.425	0.425	0.341	0.189	-0.000	-0.189	-0.341	-0.425	0.052	0.172	0.306	0.409	0.444	0.396	0.261	0.054	-0.200	-0.477
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.010	1.010	1.008	1.007	1.004	1.000	0.991	0.909	1.034	1.016

$$s_N = \sin N \alpha_2; c_N = \cos N \alpha_2$$

$$A_1 = (Ch \delta \alpha_1 - 1) S_N + Sh \alpha_1 C_N =$$

$$= 2 Sh \frac{\alpha_1}{2} Ch (N + \frac{1}{2}) \alpha_1$$

$$B_1 = (Ch \alpha_1 - 1) C_N + Sh \alpha_1 S_N =$$

$$= 2 Sh \frac{\alpha_1}{2} Sh (N + \frac{1}{2}) \alpha_1$$

$$A_2 = (\cos \alpha_2 - 1) s_N + \sin \alpha_2 c_N =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha_2}{2} \cos (N + \frac{1}{2}) \alpha_2$$

$$B_2 = (\cos s_2 - 1) c_N + \sin \alpha_2 s_N =$$

$$= -2 \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin (N + \frac{1}{2}) \alpha_2$$

La expresión [2.5] puede reducirse a la siguiente, válida para valores elevados de N:

$$A = \lambda_2 \frac{\lambda_1 + 2\lambda_1 d_1 e^{-N\alpha_1}}{\lambda_1 + 2\lambda_2 d_2 e^{-N\alpha_1}} = \lambda_2 \quad [2.5b]$$

con

$$d_1 = \frac{-B_2 + 2 + v_2 c_N}{N_N}$$

$$d_0 - 2 v_3$$

$$d_2 = \frac{A_2 - 2 v_3 s_N}{d_0 - 2 v_3}$$

TABLA II c

MODOS DE VIBRACION EN EDIFICIOS REGULARES. Modo 3.

NO. DE PISOS	COMPONENTES	Modelo de viga de corte ( $\lambda = \infty$ )										Modelo de viga de flexión ( $\lambda = 0$ )									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	MOD. DISCRETO	0.591	-0.737	0.328								0.807	-0.564	0.174							
	MOD. CONTINUO	0.591	-0.737	0.328								0.809	-0.378	-0.075							
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000								0.997	1.494	1-2.328							
4	MOD. DISCRETO	0.657	-0.228	-0.577	0.429							0.668	0.223	-0.650	0.286						
	MOD. CONTINUO	0.657	-0.228	-0.577	0.429							0.629	0.302	-0.607	0.139						
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000							1.062	0.737	1.071	2.054						
5	MOD. DISCRETO	0.597	0.170	-0.549	-0.326	0.456						0.488	0.544	-0.256	-0.530	0.347					
	MOD. CONTINUO	0.597	0.170	-0.549	-0.326	0.456						0.464	0.556	-0.193	-0.538	0.252					
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000						1.051	0.977	1.326	0.986	1.374					
6	MOD. DISCRETO	0.519	0.368	-0.258	-0.551	-0.133	0.457					0.359	0.596	0.151	-0.448	-0.388	0.377				
	MOD. CONTINUO	0.519	0.368	-0.258	-0.551	-0.133	0.457					0.345	0.590	0.181	-0.414	-0.410	0.315				
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000					1.039	1.010	0.832	1.081	0.948	1.199				
7	MOD. DISCRETO	0.447	0.447	-0.000	-0.447	-0.447	0.000	0.447				0.270	0.553	0.373	-0.147	-0.484	-0.264	0.395			
	MOD. CONTINUO	0.447	0.447	-0.000	-0.447	-0.447	0.000	0.447				0.262	0.545	0.384	-0.119	-0.470	-0.288	0.350			
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000				1.031	1.015	0.971	1.234	1.030	0.917	1.129			
8	MOD. DISCRETO	0.387	0.467	0.175	-0.255	-0.483	-0.327	0.089	0.434			0.208	0.486	0.465	0.109	-0.312	-0.452	-0.165	0.404		
	MOD. CONTINUO	0.387	0.467	0.175	-0.255	-0.483	-0.327	0.089	0.434			0.203	0.478	0.467	0.125	-0.293	-0.449	-0.188	0.370		
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000			1.024	1.015	0.996	0.869	1.066	1.007	0.881	1.091		
9	MOD. DISCRETO	0.338	0.457	0.282	-0.076	-0.384	-0.445	-0.218	0.149	0.420		0.164	0.418	0.485	0.274	-0.096	-0.386	-0.395	-0.088	0.407	
	MOD. CONTINUO	0.338	0.457	0.282	-0.076	-0.384	-0.445	-0.218	0.149	0.420		0.161	0.413	0.484	0.282	-0.081	-0.374	-0.398	-0.107	0.382	
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		1.020	1.014	1.003	0.972	1.186	1.031	0.993	0.821	1.067	
10	MOD. DISCRETO	0.297	0.435	0.341	0.065	-0.246	-0.425	-0.378	-0.129	0.189	0.406	0.132	0.359	0.470	0.366	0.084	-0.230	-0.403	-0.332	-0.027	0.406
	MOD. CONTINUO	0.297	0.435	0.341	0.065	-0.246	-0.425	-0.378	-0.129	0.189	0.406	0.130	0.354	0.467	0.369	0.093	-0.218	-0.397	-0.337	-0.043	0.387
	RELACION D/C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.016	1.013	1.006	0.992	0.898	1.054	1.016	0.985	0.632	1.050

$$d_0 = e^{\alpha_1} - 1$$

$$\lambda_1 = \frac{\text{Sh } \alpha_1}{\nu_1 \text{Ch } \alpha_1 + \nu_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\nu_1 \cos \nu_1 + \nu_2}$$

Los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se determinan según el valor de  $\omega_N$  distinguiéndose dos casos:

$$(a) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_N}{\sqrt{h/m}} < \frac{1}{\sqrt{2\nu_2}}$$

$$\text{Ch } \alpha_1 = \sqrt{\frac{1-2\nu_2\bar{\omega}^2}{1-2\nu_1}} \cot \frac{\varphi_1}{2};$$

$$\cos \alpha_2 = -\sqrt{\frac{1-2\nu_2\bar{\omega}^2}{1-2\nu_1}} \text{tg } \frac{\varphi_1}{2};$$

siendo

$$\cot \varphi = \frac{\nu_2 - \nu_1 \bar{\omega}^2}{\sqrt{(1-2\nu_1)(1-2\nu_2\bar{\omega}^2)}} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$

(b)

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_N}{\sqrt{h/m}} > \frac{1}{\sqrt{2\nu_2}}$$

$$\text{ch } \alpha_1 = 2 \frac{\nu_2 - \nu_1 \bar{\omega}^2}{1-2\nu_1} \cos^2 \frac{\varphi}{2};$$

$$\cos \alpha_2 = 2 \frac{\nu_2 - \nu_1 \bar{\omega}^2}{1-2\nu_1} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

siendo

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(1-2\nu_1)(2\nu_2\bar{\omega}^2-1)}}{\nu_2 - \nu_1 \bar{\omega}^2}$$

El valor de  $\bar{\omega}$  calculado mediante la ecuación [2.3] corresponde a una solución aproximada de

TABLA III a

FUERZAS EQUIVALENTES EN EDIFICIOS REGULARES. PRIMERA FRECUENCIA.

NO. DE PISOS	PISOS	Modelo de viga de corte ( $\lambda = \infty$ )										Modelo de viga de flexión ( $\lambda = 0$ )									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	MOD. DISCRETO	1.000										1.000									
	MOD. CONTINUO	1.103										0.857									
	RELACION D/C	0.907										1.168									
2	MOD. DISCRETO	0.724	1.171									0.384	1.197								
	MOD. CONTINUO	0.748	1.211									0.360	1.136								
	RELACION D/C	0.967	0.967									1.066	1.054								
3	MOD. DISCRETO	0.543	0.979	1.220								0.202	0.687	1.291							
	MOD. CONTINUO	0.552	0.995	1.241								0.195	0.666	1.258							
	RELACION D/C	0.983	0.983	0.983								1.034	1.031	1.026							
4	MOD. DISCRETO	0.431	0.810	1.091	1.241							0.125	0.442	0.872	1.347						
	MOD. CONTINUO	0.435	0.818	1.103	1.254							0.122	0.434	0.857	1.327						
	RELACION D/C	0.990	0.990	0.990	0.990							1.021	1.020	1.018	1.015						
5	MOD. DISCRETO	0.356	0.684	0.956	1.150	1.252						0.085	0.308	0.624	0.993	1.384					
	MOD. CONTINUO	0.359	0.688	0.962	1.158	1.260						0.083	0.303	0.616	0.982	1.370					
	RELACION D/C	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993						1.014	1.013	1.012	1.011	1.010					
6	MOD. DISCRETO	0.303	0.589	0.840	1.043	1.185	1.258					0.061	0.226	0.467	0.759	1.079	1.410				
	MOD. CONTINUO	0.305	0.592	0.844	1.048	1.190	1.264					0.061	0.224	0.463	0.753	1.071	1.400				
	RELACION D/C	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995					1.010	1.010	1.009	1.009	1.008	1.007				
7	MOD. DISCRETO	0.264	0.516	0.746	0.943	1.099	1.208	1.262				0.046	0.173	0.363	0.597	0.862	1.143	1.430			
	MOD. CONTINUO	0.265	0.518	0.748	0.946	1.103	1.211	1.266				0.046	0.172	0.360	0.593	0.857	1.136	1.422			
	RELACION D/C	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996				1.008	1.007	1.007	1.007	1.006	1.006	1.005			
8	MOD. DISCRETO	0.233	0.459	0.668	0.855	1.013	1.137	1.221	1.264			0.036	0.137	0.289	0.482	0.703	0.942	1.192	1.445		
	MOD. CONTINUO	0.234	0.460	0.670	0.858	1.016	1.140	1.225	1.268			0.036	0.136	0.288	0.479	0.699	0.938	1.186	1.439		
	RELACION D/C	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997			1.006	1.006	1.006	1.005	1.005	1.005	1.005	1.004		
9	MOD. DISCRETO	0.209	0.412	0.605	0.780	0.935	1.063	1.163	1.231	1.266		0.029	0.111	0.236	0.396	0.563	0.788	1.006	1.230	1.457	
	MOD. CONTINUO	0.210	0.413	0.606	0.782	0.937	1.066	1.166	1.234	1.269		0.029	0.110	0.235	0.394	0.560	0.785	1.002	1.226	1.453	
	RELACION D/C	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998		1.005	1.005	1.005	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.003	
10	MOD. DISCRETO	0.189	0.375	0.551	0.716	0.864	0.994	1.101	1.183	1.239	1.267	0.024	0.092	0.196	0.331	0.491	0.668	0.859	1.058	1.262	1.467
	MOD. CONTINUO	0.190	0.375	0.552	0.717	0.866	0.995	1.103	1.185	1.241	1.270	0.024	0.091	0.195	0.330	0.489	0.666	0.857	1.055	1.258	1.463
	RELACION D/C	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	1.004	1.004	1.004	1.004	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003

la ecuación característica del pórtico, es decir, de la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & [\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - 2\nu_3 (\lambda_1 S_N + \lambda_2 S_N)] \\
 & [\lambda_2 A_1 - \lambda_1 A_2 - (\nu_3 + 1) \lambda_1 \lambda_2 (C_N - c_N)] = \\
 & = \lambda_1 \lambda_2 [B_1 - B_2 - 2\nu_3 (C_N - c_N)] \\
 & [B_1 - B_2 - (\nu_3 + 1) (\lambda_1 S_N + \lambda_2 S_N)]
 \end{aligned}$$

Esta expresión puede aproximarse a la siguiente más simplificada y conveniente numéricamente:

$$\begin{aligned}
 & [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A_2 - 2\lambda_1 \lambda_2 B_2] [d_0 - \nu_3 - \frac{\nu_3 + 1}{2} d_1 - \\
 & - A_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) (\nu_3 - \frac{\nu_3 + 1}{2} \lambda_1) + \\
 & + 2\lambda_2 d_0 (\lambda_2 S_N + \lambda_1 c_N) (\nu_3 - \frac{\nu_3 + 1}{2} \lambda_3) = 0
 \end{aligned}$$

Por otra parte, se presenta asimismo en las tablas 1 a 3 las frecuencias, modos y fuerzas equivalentes correspondientes a la sustitución del edificio por una estructura continua. Se observa que al crecer el número N de pisos, esta aproximación es muy adecuada, de modo que para valores de N mayor de 10, no se comete

TABLA III b

FUERZAS EQUIVALENTES EN EDIFICIOS REGULARES. SEGUNDA FRECUENCIA.

NO. DE PISOS	PISOS	Modelo de viga de corte ( $\lambda = \infty$ )										Modelo de viga de flexión ( $\lambda = 0$ )									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	MOD. DISCRETO	0.276	-0.171									0.613	-0.198								
	MOD. CONTINUO	0.404	-0.249									0.593	-0.061								
	RELACION D/C	0.685	0.685									1.034	3.258								
3	MOD. DISCRETO	0.349	0.155	-0.280								0.461	0.548	-0.364							
	MOD. CONTINUO	0.414	0.184	-0.332								0.431	0.556	-0.281							
	RELACION D/C	0.844	0.844	0.844								1.070	0.984	1.293							
4	MOD. DISCRETO	0.333	0.333	-0.000	-0.333							0.321	0.635	0.345	-0.462						
	MOD. CONTINUO	0.368	0.368	-0.000	-0.368							0.306	0.621	0.367	-0.409						
	RELACION D/C	0.907	0.907	0.907	0.907							1.047	1.023	0.940	1.129						
5	MOD. DISCRETO	0.301	0.394	0.215	-0.112	-0.362						0.232	0.566	0.587	0.169	-0.528					
	MOD. CONTINUO	0.321	0.420	0.229	-0.120	-0.386						0.225	0.554	0.587	0.192	-0.492					
	RELACION D/C	0.938	0.938	0.938	0.938	0.938						1.032	1.021	1.000	0.881	1.073					
6	MOD. DISCRETO	0.269	0.403	0.334	0.097	-0.189	-0.379					0.175	0.479	0.630	0.477	0.031	-0.575				
	MOD. CONTINUO	0.281	0.421	0.349	0.102	-0.197	-0.397					0.171	0.470	0.625	0.483	0.051	-0.549				
	RELACION D/C	0.956	0.956	0.956	0.956	0.956	0.956					1.023	1.018	1.009	0.988	0.614	1.048				
7	MOD. DISCRETO	0.241	0.390	0.390	0.241	-0.000	-0.241	-0.390				0.136	0.401	0.599	0.600	0.359	-0.077	-0.611			
	MOD. CONTINUO	0.249	0.404	0.404	0.249	-0.000	-0.249	-0.404				0.134	0.395	0.593	0.599	0.367	-0.061	-0.592			
	RELACION D/C	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967				1.018	1.015	1.010	1.002	0.979	1.267	1.034			
8	MOD. DISCRETO	0.218	0.370	0.412	0.330	0.149	-0.076	-0.279	-0.398			0.109	0.336	0.545	0.627	0.529	0.249	-0.164	-0.639		
	MOD. CONTINUO	0.223	0.380	0.423	0.339	0.153	-0.078	-0.286	-0.408			0.108	0.333	0.540	0.625	0.531	0.258	-0.150	-0.624		
	RELACION D/C	0.974	0.974	0.974	0.974	0.974	0.974	0.974	0.974			1.013	1.011	1.008	1.004	0.995	0.966	1.092	1.024		
9	MOD. DISCRETO	0.198	0.348	0.414	0.381	0.255	0.068	-0.135	-0.306	-0.403		0.089	0.285	0.488	0.612	0.605	0.446	0.153	-0.233	-0.662	
	MOD. CONTINUO	0.202	0.355	0.423	0.389	0.261	0.070	-0.138	-0.312	-0.411		0.088	0.283	0.484	0.609	0.604	0.450	0.161	-0.222	-0.650	
	RELACION D/C	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979		1.011	1.010	1.008	1.005	1.001	0.992	0.950	1.051	1.019	
10	MOD. DISCRETO	0.181	0.326	0.407	0.407	0.326	0.181	-0.000	-0.181	-0.326	-0.407	0.074	0.244	0.434	0.578	0.627	0.556	0.363	0.069	-0.291	-0.681
	MOD. CONTINUO	0.184	0.332	0.414	0.414	0.332	0.184	-0.000	-0.184	-0.332	-0.414	0.074	0.242	0.431	0.574	0.625	0.556	0.367	0.076	-0.281	-0.670
	RELACION D/C	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	1.010	1.009	1.008	1.006	1.004	1.000	0.990	0.909	1.033	1.015

error apreciable por esta sustitución. Por su interés se describe dicha sustitución a continuación.

La luz de la viga equivalente es, como se desprende de la figura 2,  $L = (2N + 1/2) h$ , con  $h$  la separación entre plantas. La densidad lineal de masas es  $\rho = m/h$ . Por último, la rigidez a flexión de la viga para el caso  $\lambda = 0$ , es  $2M.EI_1$ , en donde  $M$  representa el número de vanos y la inercia de los pilares extremos mitad de la de los interiores se representa por  $I_1$ . En el caso de  $\lambda = \infty$ , la rigidez al corte viene dada por la expresión  $2M.12EI_1/h^3$ , que se designará en lo sucesivo por  $k$ , es decir:

$$k = 2 M \frac{2 M}{h^3} EI_1$$

La tabla 5 recoge los resultados característi-

cos de una estructura entramado regular considerada como continua. En ella a partir de los valores de la frecuencia  $\omega_N$  y modo de vibración correspondiente  $\phi_N$ , se obtienen los restantes mediante las fórmulas conocidas de la dinámica:

$$m_n^* = \phi_n^T m \phi_N$$

$$L_n = \phi_n^T m l \quad [2.6]$$

$$Q_N = \frac{L_n^2}{m_n^*} S_{na}$$

$$\dot{f}_{nj} = \frac{L_n}{m_n^*} m \phi_n S_{na}$$



TABLA III c

FUERZAS EQUIVALENTES EN EDIFICIOS REGULARES. TERCERA FRECUENCIA.

NO. DE PISOS	PISOS	Modelo de viga de corte ( $\lambda = \infty$ )										Modelo de viga de flexión ( $\lambda = 0$ )									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	MOD. DISCRETO	0.108	-0.134	0.060								0.336	-0.235	0.073							
	MOD. CONTINUO	0.199	-0.248	0.110								0.385	-0.180	-0.036							
	RELACION D/C	0.540	0.540	0.540								0.873	1.309	-2.039							
4	MOD. DISCRETO	0.184	-0.064	-0.161	0.120							0.352	0.117	-0.343	0.151						
	MOD. CONTINUO	0.251	-0.087	-0.221	0.164							0.340	0.163	-0.328	0.075						
	RELACION D/C	0.732	0.732	0.732	0.732							1.038	0.720	1.046	2.008						
5	MOD. DISCRETO	0.208	0.059	-0.191	-0.113	0.159						0.289	0.323	-0.152	-0.314	0.206					
	MOD. CONTINUO	0.252	0.072	-0.232	-0.138	0.192						0.277	0.332	-0.115	-0.321	0.151					
	RELACION D/C	0.824	0.824	0.824	0.824	0.824						1.045	0.972	1.318	0.980	1.366					
6	MOD. DISCRETO	0.208	0.148	-0.104	-0.221	-0.053	0.183					0.232	0.385	0.097	-0.290	-0.251	0.244				
	MOD. CONTINUO	0.238	0.169	-0.118	-0.253	-0.061	0.210					0.224	0.383	0.117	-0.269	-0.266	0.204				
	RELACION D/C	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875					1.036	1.006	0.829	1.078	0.945	1.195				
7	MOD. DISCRETO	0.200	0.200	-0.000	-0.200	-0.200	0.000	0.200				0.188	0.385	0.260	-0.102	-0.337	-0.184	0.275			
	MOD. CONTINUO	0.221	0.221	-0.000	-0.221	-0.221	0.000	0.221				0.183	0.380	0.268	-0.083	-0.328	-0.201	0.244			
	RELACION D/C	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907				1.030	1.015	0.971	1.233	1.029	0.916	1.128			
8	MOD. DISCRETO	0.189	0.227	0.085	-0.124	-0.235	-0.159	0.043	0.211			0.155	0.361	0.345	0.081	-0.232	-0.335	-0.123	0.300		
	MOD. CONTINUO	0.203	0.245	0.092	-0.134	-0.254	-0.172	0.047	0.228			0.151	0.355	0.347	0.093	-0.217	-0.333	-0.139	0.275		
	RELACION D/C	0.926	0.928	0.928	0.928	0.928	0.928	0.928	0.928			1.025	1.016	0.996	0.869	1.067	1.007	0.882	1.091		
9	MOD. DISCRETO	0.177	0.239	0.147	-0.039	-0.201	-0.233	-0.114	0.078	0.220		0.129	0.328	0.381	0.215	-0.075	-0.302	-0.310	-0.069	0.319	
	MOD. CONTINUO	0.187	0.254	0.156	-0.042	-0.213	-0.247	-0.121	0.083	0.233		0.126	0.324	0.379	0.221	-0.064	-0.293	-0.312	-0.084	0.299	
	RELACION D/C	0.942	0.942	0.942	0.942	0.942	0.942	0.942	0.942	0.942		1.020	1.015	1.004	0.972	1.186	1.032	0.994	0.822	1.067	
10	MOD. DISCRETO	0.165	0.242	0.190	0.036	-0.137	-0.237	-0.210	-0.072	0.105	0.226	0.109	0.296	0.388	0.302	0.069	-0.189	-0.333	-0.274	-0.022	0.335
	MOD. CONTINUO	0.173	0.254	0.199	0.038	-0.143	-0.248	-0.221	-0.075	0.110	0.237	0.107	0.292	0.385	0.304	0.077	-0.180	-0.328	-0.278	-0.036	0.319
	RELACION D/C	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953	1.016	1.013	1.006	0.992	0.897	1.053	1.016	0.985	0.632	1.050

TABLA 4

VALORES DEL PARAMETRO DE INTERPOLACION k

Armónicos N.º de Pisos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.1209									
2	1.2623	0.9889								
3	1.2730	1.1147	0.9943							
4	1.2623	1.1520	1.0818	1.0328						
5	1.2553	1.1712	1.0995	1.0966	1.0700					
6	1.2518	1.1802	1.1131	1.1003	1.1209	1.1026				
7	1.2483	1.1844	1.1239	1.1027	1.1176	1.1394	1.1332			
8	1.2448	1.1885	1.1315	1.1042	1.1086	1.1355	1.1584	1.1552		
9	1.2413	1.1927	1.1391	1.1079	1.1030	1.1226	1.1544	1.1777	1.1712	
10	1.2413	1.1935	1.1427	1.1132	1.1020	1.1126	1.1392	1.1702	1.1907	1.1865

con  $\underline{r}$  un vector geométrico, que relaciona los grados de libertad de la estructura excitados por el movimiento sísmico, que se supone horizontal, aplicado simultáneamente en toda la cimentación y definido mediante su espectro de res-

puesta de la aceleración absoluta  $S_a(\omega, \eta)$ . En este espectro las características de ductilidad de la estructura, la influencia del terreno y de la cimentación deben ser incluidos.

### 3. EJEMPLOS

Se considera una estructura regular de siete pisos ( $N = 7$ ) con  $k/m = 1$  y dos hipótesis para la relación de rigideces dintel-soportes con objeto de comprobar la bondad de la interpolación propuesta [2.3].

Hipótesis (1):  $\lambda = 0,2$

De la tabla 1, se deducen las frecuencias:

$$(\lambda = \infty) : \omega_1 = 0,1074 \quad \omega_2 = 0,6180 \quad \omega_3 = 1,0000$$

$$(\lambda = 0) : \omega_1 = 0,0181 \quad \omega_2 = 0,1147 \quad \omega_3 = 0,3239$$

Según la tabla 4 los coeficientes de la fórmula

**TABLA 5**  
**CARACTERISTICAS DINAMICAS DE EDIFICIOS REGULARES ELEVADOS (Simulación estructura continua)**

Variable en el armónico n	Notación	Viga de flexión	Viga de cortante
Frecuencia	$\omega_n$	$\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\bar{\omega}_n^2}{(2N+1)^2} \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{2_{n-1}}{2_{N+1}} n \sqrt{\frac{k}{m}}$
Modo. Componente de la planta j	$\phi_{nj}$	$A_n (\text{Ch } \bar{\omega}_n \zeta_j - \cos \bar{\omega}_n \zeta_j) - (S h \bar{\omega}_n \zeta_j - \text{sen } \bar{\omega}_n \zeta_j)$	$\text{sen} \left( \frac{2_{n-1}}{2_{N+1}} \pi j \right)$
Masa reducida	$m_n$	$\frac{2N+1}{2} A_n m$	$\frac{2N+1}{2} m$
Factor de participación	$L_n$	$\frac{2N+1}{\bar{\omega}_n} m$	$\frac{4}{(2N-1)\pi}$
Cortante en la base	$Q_n$	$\frac{2(2N+1)}{A_n^2} m g S_{an}$	$\frac{4(2N+1)}{(2N-1)^2 \pi^2} m g S_{an}$
Fuerza equivalente en la planta j	$f_{jn}$	$\frac{2}{\bar{\omega}_n A_n^2} \phi_{nj} m g S_{an}$	$\frac{4}{(2N-1)} \phi_{nj} m g S_{an}$

Notas:  $\bar{\omega}_1 = 1,8751$   $\bar{\omega}_2 = 4,6941$   $\bar{\omega}_3 = 7,8548$   $\bar{\omega}_n = \frac{2N+1}{2} \pi (n > 3)$

$$\text{Ch } \bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n = 1 - 1 \quad A_n = \frac{\text{Ch } \bar{\omega}_n + \cos \bar{\omega}_n}{\text{Sh } \bar{\omega}_n - \text{sen } \bar{\omega}_n} \quad \zeta_j = \frac{2j}{2N+1}$$

$S_{an}$  es la ordenada (fracción de g) del espectro de respuesta de la aceleración del armónico n, es decir  $S_{an} = S_a(\omega_n, \eta_n)$

de interpolación son para cada armónico:

$$\beta_1 = 1,2483 \quad \beta_2 = 1,1844 \quad \beta_3 = 1,1239$$

Aplicando [2.3] se obtiene las frecuencias correspondientes a  $\lambda = 0,2$

$$(\lambda = 0,2):$$

$$\omega_1 = 0,0998; \omega_2 = 0,3217; \omega_3 = 0,5910$$

Los modos de vibración se deducen aplicando las fórmulas [2.5], con lo que resulta para cada armónico n:

n = 1:

$$\alpha_1 = 1,44505; \alpha_2 = 0,24118$$

$$\lambda_1 = 1,24192; \lambda_2 = 0,20066; A_n = 0,20066$$

n = 2:

$$\alpha_1 = 1,58609; \alpha_2 = 0,70931;$$

$$\lambda_1 = 1,36449; \lambda_2 = 0,58173; A_n = 0,58173$$

n = 3:

$$\alpha_1 = 1,81017; \alpha_2 = 1,14644;$$

$$\lambda_1 = 1,55498; \lambda_2 = 0,90776; A_n = 0,90776$$

con lo que se obtienen los componentes de cada uno de los modos de vibración que se reflejan en la tabla 6.

**TABLA VI**  
**FRECUENCIAS  $\omega$  Y MODOS DE VIBRACION  $\phi$  ( $\lambda = 0.2$ )**

	Solución aproximada mediante interpolación			Solución exacta		
Frecuencia	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
	0,0998	0,3217	0,5910	0,0945	0,2954	0,5369
Componentes	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
1	0,0620	0,1902	0,3220	0,0601	0,1800	0,3116
2	0,1702	0,4515	0,4840	0,1654	0,4208	0,5167
3	0,2804	0,4938	0,1124	0,2736	0,5135	0,2242
4	0,3773	0,3235	-0,3851	0,3704	0,3960	-0,2934
5	0,4533	-0,0038	-0,4260	0,4490	0,1005	-0,5025
6	0,5049	-0,3391	0,0502	0,5065	-0,2352	-0,1694
7	0,5346	-0,5605	0,5467	0,5465	-0,5500	0,4674

**TABLA VII**  
**FRECUENCIAS  $\omega$  Y MODOS DE VIBRACION  $\phi$  ( $\lambda = 4.0$ )**

	Solución aproximada mediante interpolación			Solución exacta		
Frecuencia	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
	0,1933	0,5709	0,9286	0,1898	0,5645	0,9242
Componentes	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
1	0,0995	0,2825	0,4232	0,0986	0,2811	0,4229
2	0,2054	0,4836	0,4612	0,2037	0,4837	0,4647
3	0,3020	0,4924	0,0298	0,2998	0,4982	0,0378
4	0,3845	0,3050	-0,4320	0,3826	0,3185	-0,4273
5	0,4490	-0,0041	-0,4533	0,4481	0,0146	-0,4606
6	0,4927	-0,3117	-0,0121	0,4935	-0,2952	-0,0280
7	0,5143	-0,5037	0,4637	0,5179	-0,4999	0,4563

Hipótesis (2):  $\lambda = 4,0$

Análogamente se deducen por interpolación los valores de las frecuencias que se recogen en la tabla 6, es decir:

$$\omega_1 = 0,1993; \omega_2 = 0,5709; \omega_3 = 0,9286$$

Los modos se calculan al entrar con estos valores en las fórmulas [2.5], resultando:

$n = 1$ :

$$\alpha = 3,91405; \alpha_2 = 0,21630$$

$$\lambda_1 = 1,92322; \lambda_2 = 0,04299; A_n = 0,042990$$

$n = 2$ :

$$\alpha_1 = 3,93243; \alpha_2 = 0,64244$$

$$\lambda_1 = 1,9359; \lambda_2 = 0,12144; A_n = 0,12144$$

$n = 3$ :

$$\alpha = 3,96509; \alpha_2 = 1,05845;$$

$$\lambda_1 = 1,95827; \lambda_2 = 0,18045; A_n = 0,18045$$

y los modos se recogen en la tabla 7.

Se observa la concordancia obtenida mediante la interpolación propuesta, tanto, en los va-

TABLA VIII  
FUERZAS EQUIVALENTES

Hipótesis	$\lambda = 0.2$			$\lambda = 4.0$		
Pisos/armónico	1	2	3	1	2	3
1	0,1477	0,1019	0,2320	0,2435	0,2102	0,2034
2	0,4057	0,2311	0,3487	0,5027	0,3598	0,2217
3	0,6682	0,2634	0,0810	0,7390	0,3644	0,0143
4	0,8989	0,1732	-0,2725	0,9409	0,2269	-0,2076
5	1,0801	-0,0020	-0,3069	1,0989	-0,0030	-0,2179
6	1,2031	-0,1816	0,0362	1,2058	-0,2319	-0,0058
7	1,2738	-0,3002	0,4058	1,2588	-0,3747	0,2229

lores de las frecuencias como en los distintos componentes de los modos.

Los valores de las fuerzas horizontales aplicadas en cada piso, que son equivalentes al seismo definido por el espectro de aceleración  $S_a(\omega, \eta)$  se obtienen mediante las expresiones (2.6) y en este caso se calculan para cada armónico con los valores aproximados de los modos y frecuencias para las hipótesis  $\lambda = 0,2$  y  $\lambda = 4,0$ . Se observan en los resultados recogidos en la tabla 8, diferencias significativas entre estas fuerzas al variar la relación entre las rigideces de los dinteles y pilares.

#### 4. DETERMINACION DE LA ESTRUCTURA HOMOGENEIZADA

La estructura real se sustituye en el cálculo aproximado por otra regular, para la cual existen fórmulas explícitas de sus frecuencias  $\omega_{oi}$  y modos de vibración  $\phi_{oi}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Se denomina  $N$  el número de plantas del edificio y se supone que todos los soportes comienzan en la cimentación, es decir, no existen vigas de carga. El objeto de esta hipótesis es evitar modos de vibración importantes en el sentido vertical, ya que se admite que el seismo actúa como un movimiento horizontal impuesto. Generalmente se consideran en el análisis un número reducido de armónicos y como máximo los tres primeros.

El procedimiento de homogenización de la estructura sigue los pasos que se describen a continuación:

(1) En cada planta  $n$  se evalúa para cada nu-

do  $m$  la relación de rigideces al giro de los soportes y de las vigas, es decir, el parámetro definido como sigue:

$$\lambda_{nm} = \frac{R_{nm}}{R'_{nm}} \quad [4.1]$$

con  $R_{nm}$  y  $R'_{nm}$  la suma de las rigideces al giro de las vigas y de los soportes que acometen al nudo.

A continuación se calcula el valor medio  $\lambda_n$  de la planta  $n$ , es decir, si  $M_n$  es el número de nudos de la planta se obtiene:

$$\lambda_n = \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \lambda_{nm} \quad [4.2]$$

Por último se define para toda la estructura el parámetro

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n \quad [4.3]$$

(2) Se determina para cada planta  $n$  su rigidez directa  $k_n$  al desplazamiento horizontal. Este valor  $k_n$  puede calcularse mediante la expresión:

$$(k_n = \sum_{m=1}^{M_n} (k_{nm} + k_{n+1,m})) \quad [4.4]$$

en donde  $M_n$  representa el número de soportes que acometen a la planta (superiores e inferiores);  $k_{nm}$  y  $k_{n+1,m}$  corresponden a las rigideces al movimiento transversales de uno de los soportes inferiores y superior respectivamente



conectados al nudo  $m$ . Se supone que si no existe soportes superior al valor de  $k_{n+1,m} = 0$ . Para el caso de sección constante el valor de  $k_{nm}$  es:

$$k_{nm} = \frac{12 EI}{h^3} \quad (h \text{ altura del soporte}) \quad [4.5]$$

(3) Para cada piso  $n$  se obtiene la masa total  $m_n$ . Esta masa traslacional se supone actúa al nivel del piso y por consiguiente debe incluir la proporción de la masa de los soportes que acometen a la planta.

(4) Se definen para cada planta  $n$  los valores:

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2N-1} \sum_{m=1}^{Mn} \left( \frac{k_n}{m_n} + \frac{k_{n+1}}{m_{n+1}} \right) \quad [4.6]$$

con

$$k_{N+1} = 0$$

$$\bar{p}_1 = \left[ \prod_{m=1}^{Mn} \frac{k_n}{m_n} \right]^{\frac{1}{N}}$$

(5) La estructura homogénea equivalente a la real está definida por los tres siguientes parámetros:

$$N \lambda k \frac{k}{m} = \frac{\bar{p}_0 + \bar{p}_1}{2} = g$$

## 5. CALCULO SISMICO APROXIMADO DE UNA ESTRUCTURA DE EDIFICACION

El método que se describe es válido para estructuras de edificación sin vigas de carga, es decir, con todos los pilares descendiendo hasta la cimentación. Se basa en la utilización de la técnica de Rayleigh-Ritz, con los vectores iniciales de cálculo, los correspondientes a la solución homogenizada.

La estructura dada se homogeniza de acuerdo con el procedimiento comentado en el apartado 4. Las tres primeras frecuencias y modos de vibración se determinan utilizando las tablas 1 a 4, y se denominan en lo que sigue  $\omega_i^0$  y  $\phi_i^0$  ( $i=1,2,3$ ).

La matriz de masas de la estructura real se supone diagonal  $m = \text{diag} (m_1, m_2, \dots, m_N)$ , co-

rrespondiente a las masas de traslación situadas en cada uno de las  $N$  plantas. La matriz de rigidez de la estructura se designa por  $\underline{k}$  y su obtención se lleva a cabo de acuerdo con los procedimientos de cálculo matricial de estructuras.

Los distintos modos de vibración de la estructura real pueden expresarse como sigue en función de los modos de la estructura homogénea:

$$\underline{\phi}_i = \sum_{j=1}^3 q_{ij} \phi_j^1 \quad [5.1]$$

con:

$$\underline{k} \underline{\phi}_i^1 = \underline{m}^{1/2} \underline{\phi}_i^0 \quad [5.2]$$

Las constantes  $q_i$  se determinan de acuerdo con el proceso de Rayleigh-Ritz es decir, mediante la resolución del problema de autovalores siguiente:

$$(\underline{k}^* - \omega_i^2 \underline{m}^*) \underline{g}_i = 0 \quad [5.3]$$

siendo

$$\underline{k}^* = [\underline{k}_{ij}^*] \quad [5.4]$$

$$\underline{m}^* = [\underline{m}_{ij}^*] \quad [5.5]$$

$$\underline{k}_{ij}^* = \underline{\phi}_i^{1T} \underline{k} \underline{\phi}_j^1 = \underline{\phi}_i^{1T} \underline{m}^{1/2} \underline{\phi}_j^0 \quad [5.6]$$

$$\underline{m}_{ij}^* = \underline{\phi}_i^{1T} \underline{m} \underline{\phi}_j^1 \quad [5.7]$$

$$\underline{g}_i = \{ q_{ij} \} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Una vez obtenidos los valores de las constantes  $q_i$  se deducen los modos de vibración de la estructura real mediante la aplicación de la expresión (5.1). Las tres primeras frecuencias de vibración vienen dadas por los autovalores  $\omega_i^2$  del problema (5.3).

Por consiguiente, es preciso, aplicar en las distintas plantas de la estructura real, las fuerzas horizontales  $\underline{m}^{1/2} \underline{\phi}_i^0$ . Los movimientos horizontales de cada piso experimentados por esta

estructura, obtenidos mediante un programa general de cálculo de estructuras o técnicas iterativas convencionales, son las componentes del vector  $\phi_i^0$ , de acuerdo con la expresión [5.2].

Es posible reducir de un modo considerable el esfuerzo de cálculo, sin introducir errores importantes, si la estructura es razonablemente regular, suponiendo que las matrices  $\underline{k}^*$  y  $\underline{m}^*$  son diagonales.

Esta simplificación implica que las siguientes igualdades son válidas:

$$q_i^j = \delta_i^j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad [5.8]$$

$$q_i^i = 1$$

$$\omega_i^2 = \frac{\phi_i^{1T} \underline{m}^{1/2} \phi_i^0}{\phi_i^{1T} \underline{m} \phi_i^0} \quad [5.9]$$

$$\underline{\phi}_i = \underline{\phi}_i^1 \quad [5.10]$$

Por último se puede simplificar aún más el cálculo anterior, mediante la consideración de un procedimiento basado en la comparación directa de los problemas de autovalores de las estructuras real y homogenizada, resultando:

La frecuencia de la estructura real es:

$$\omega_i = \omega_i^0 \sqrt{\mu_i} \quad [5.11]$$

con

$$\mu_i = p_i p \quad [5.12]$$

El valor del parámetro  $p_i$  se obtiene como solución de la ecuación

$$p_i^N = \frac{(-)^N \bar{p}_i^N - \alpha_i \bar{p}_0 p_i^{N-1}}{(-)^N - \alpha_i} \quad [5.13]$$

siendo

$$\alpha_i = (2N-1) (\omega_i^0)^{2(N-1)}$$

Para los casos usuales en la práctica con valores de  $p_i$  y  $p_0$  muy parecidos ( $p_i \approx p_0$ ) se puede deducir la siguiente expresión explícita aproximada de  $p_i$ :

$$p_i = \bar{p}_0 + \frac{(-)^N (\bar{\lambda}_i^N - p_0) + \bar{p}_0 (1 - \bar{p}_0) \alpha_i}{(-)^N N - [(1 - \bar{p}_0) N + \bar{p}_0] \alpha_i} \quad [5.14]$$

Para valores altos de  $i$ , se puede suponer  $(\omega_i^0)^2$  muy grande y por consiguiente resulta:

$$p_i = \bar{p}_0 \left[ 1 - \frac{1 - \bar{p}_0}{(1 - \bar{p}_0)^N + \bar{p}_0^N} \right] \quad [5.15]$$

Los valores de los modos de vibración  $\phi_i$ , dentro de este procedimiento aproximado, pueden calcularse en función de las  $\phi_i^0$ , obtenidos de la tabla 2, según las fórmulas:

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \phi_{ij}^0 \quad [5.16]$$

con  $\phi_{ij}^0$  y  $\phi_{ij}^1$  las componentes  $j$  de los vectores  $\underline{\phi}_i$  y  $\underline{\phi}_i^1$  respectivamente.

Una vez conocidas las frecuencias y modos de vibración correspondientes se puede calcular la estructura real bajo la acciones sísmicas mediante la consideración de un sistema de fuerzas horizontales equivalentes aplicadas en cada piso  $j$  y armónico  $i$ . La expresión de estas fuerzas equivalentes al seísmo definido por su espectro de respuesta de aceleraciones  $S_a(\omega, \eta)$  es:

$$f_i = g \frac{L_i}{m_i^*} (\underline{m} \underline{\phi})_i; \quad \frac{S_a(\omega, \eta)}{g} \quad [5.17]$$

siendo  $g$  la aceleración de la gravedad.

$$L_i = \underline{\phi}_i^T \underline{m} \underline{r} = \sum_{j=1}^N \phi_{ij} m_j \quad [5.18]$$

$$m_i^* = \underline{\phi}_i^T \underline{m} \underline{\phi}_i = \sum_{j=1}^N \phi_{ij} m_j \phi_{ij} \quad [5.19]$$

$$(\underline{m} \underline{\phi})_i = m_j \phi_{j, \eta} \quad [5.20]$$

$S_a(\omega_i, \eta_i)$  es la ordenada del espectro de respuesta de aceleración absolutas, para la pulsación  $\omega_i$  y la fracción de amortiguamiento crítico  $\eta_i$ . De acuerdo con la norma sísmica que se utilice (en España la norma sismorresistente PDS-1) este espectro estará definido en función de la intensidad sísmica esperada en la vida de la estructura y de su ductilidad.

Por último los resultados finales escalares  $R$

(momentos, cortantes, movimientos, etc.) en una sección determinada se deduce a partir de los correspondientes para cada modo  $i$  calculados para cada sistema de fuerzas equivalentes mediante la regla de composición de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{N1} R_i^2} \quad [5.21]$$

con  $N1$  el número de modos elegidos en el cálculo, y en este caso se adopta  $N1=3$ .

## 6. EJEMPLOS DE APLICACION

### Ejemplo 1

Con objeto de indicar la aplicación del procedimiento expuesto así como el grado de aproximación utilizado se considera un ejemplo muy simple de una estructura de edificación no homogénea tipo viga de corte ( $\lambda = \infty$ ), por lo que no se precisa proceder a interpolación. Está constituida por un entramado de cuatro pisos ( $N=4$ ) según se muestra en la figura 3 y ha sido calculada en la referencia (2), según procedimientos típicos de la dinámica de estructuras, obteniéndose los resultados siguientes:

$$\text{Matriz de rigidez } \underline{k} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} k$$

$$\text{Matriz de masas } \underline{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} m$$

Ecuación característica  $(\underline{K} - \underline{m}\omega^2) = 0$ , de la que resulta:

$$\text{Frecuencias } \underline{\omega}^2 = \begin{bmatrix} 0,2209 \\ 1,0996 \\ 2,1093 \\ 3,9035 \end{bmatrix} k/m$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0,4700 \\ 1,0486 \\ 1,4524 \\ 1,9757 \end{bmatrix} \sqrt{k/m}$$

Modos de vibración

$$\phi = \begin{bmatrix} 1,00000 & 1,00000 & -0,90145 & 0,15436 \\ 0,77910 & -0,09963 & 1,00000 & -0,44817 \\ 0,49655 & -0,53989 & -0,15859 & 1,00000 \\ 0,23506 & -0,43761 & -0,70797 & -0,63688 \end{bmatrix}$$

Mediante el procedimiento aproximado comentado en los apartados anteriores se deduce la estructura homogénea de las siguientes características:

$$N = 4; \quad \lambda = \infty$$

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{7} (6 + \frac{4}{3}) = \frac{22}{21} = 1,04762$$

$$\bar{p}_1 = \sqrt[4]{2} = 1,28921$$

$$k/m = 1,118415$$

Planta	$k_n/m_n$	$k_{n+1}/m_{n+1}$
4	1	—
3	1	1/2
2	3/2	1
1	4/3	1

De la inspección de las tablas 1 y 2 se obtiene para  $\lambda = \infty$  y  $N = 4$  los valores de las frecuencias:

Armónico	$\omega_i^0$	$(\omega_i^0)^2$
1	0,3470	0,1204
2	1,0000	1,0000
3	1,5320	2,3470
4	1,8790	3,5306

y los modos

$$\underline{\phi}_1^0 = \begin{bmatrix} 0,657 \\ 0,577 \\ 0,429 \\ 0,228 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,8782 \\ 0,6530 \\ 0,3470 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_2^0 = \begin{bmatrix} -0,577 \\ 0,000 \\ 0,577 \\ 0,577 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,0000 \\ -1,0000 \\ -1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_3^0 = \begin{bmatrix} 0,429 \\ 0,577 \\ 0,228 \\ 0,657 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ -1,3456 \\ -0,5315 \\ 1,5315 \end{bmatrix}$$

Se suponen inicialmente que los modos son los anteriores premultiplicados por  $m^{-1/2}$ , es decir:

$$\underline{\phi}_1^0 = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,6210 \\ 0,4617 \\ 0,2003 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_2^0 = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,0000 \\ -0,7071 \\ -0,5774 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_3^0 = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ -0,9515 \\ -0,3758 \\ 0,8842 \end{bmatrix}$$

La estructura se somete a las sucesivas hipótesis de carga definidas por  $\underline{m}\phi_i^0 = \underline{m}^{1/2} \phi_i^0$ , se calculan los casos indicados en la figura. Los movimientos resultantes, se recogen en los vectores  $\phi_i^1 = \underline{k}^{-1} \underline{m}\phi_i^0$ . En este ejemplo sencillo el cálculo estructural se puede efectuar directamente, resultando:

$$\underline{\phi}_1^1 = \begin{bmatrix} 49,4125 \\ 37,4125 \\ 23,9605 \\ 11,2989 \end{bmatrix} \frac{m}{12 k}$$

$$\underline{\phi}_2^1 = \begin{bmatrix} 9,9310 \\ -2,0690 \\ -8,0690 \\ -6,4122 \end{bmatrix} \frac{m}{12 k}$$

$$\underline{\phi}_3^1 = \begin{bmatrix} 2,9576 \\ -9,0424 \\ -3,6244 \\ 2,9940 \end{bmatrix} \frac{m}{12 k}$$

Los modos de vibración finales pueden suponerse en la forma:

$$\underline{\phi} = q_1 \underline{\phi}_1^1 + q_2 \underline{\phi}_2^1 + q_3 \underline{\phi}_3^1 = \underline{\phi}^1 q$$

Las constantes  $q = (q_1, q_2, q_3)^T$  son los autovectores del problema

$$(\underline{k}^* - \omega \underline{m}^*) \underline{q} = 0$$

con

$$\underline{k}^* = \{ \underline{\phi}_i^{1T} \underline{m} \underline{\phi}_i^0 \} \text{ y } \underline{m}^* = \{ \underline{\phi}_i^{1T} \underline{m} \underline{\phi}_i^1 \}$$

En este caso resulta:

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} 124,7666 & -3,9946 & -9,8197 \\ -3,9946 & 32,4497 & 2,9125 \\ -9,8157 & 2,9125 & 30,8311 \end{bmatrix} k$$

$$\underline{m}^* = \begin{bmatrix} 6672,0083 & -268,1270 & -602,5647 \\ -268,1270 & 360,7595 & 67,6733 \\ -602,5647 & 67,6733 & 225,4424 \end{bmatrix} m/12$$

Los autovalores son:

$$\omega_1^2 = 12 \times 0,01841406 = 0,22097; \quad \omega_1 = 0,4701$$

$$\omega_2^2 = 12 \times 0,09193325 = 1,10320; \quad \omega_2 = 1,0503$$

$$\omega_3^2 = 12 \times 0,189333225 = 2,16400; \quad \omega_3 = 1,4711$$

y los autovectores son:

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1,00000 \\ 0,08789 \\ 0,00402 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} 0,02936 \\ 1,00000 \\ 0,09948 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \begin{bmatrix} 0,08321 \\ -0,17189 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$



Los modos de vibración son por consiguiente según (5.1):

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1,00000 \\ 0,77428 \\ 0,49848 \\ 0,23246 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 1,00000 \\ -0,08450 \\ -0,56713 \\ -0,43554 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_3 = \begin{bmatrix} -0,96202 \\ 1,00000 \\ 0,04374 \\ -0,90358 \end{bmatrix}$$

que constituyen una aproximación muy aceptable de la solución exacta incluso para la tercera frecuencia y modo de vibración.

Una simplificación que evita la resolución del problema de autovalores (5.3) consiste, como ya se ha indicado, en aplicar directamente las expresiones (5.9) y (5.10) alcanzándose los resultados:

Frecuencias

$$\omega_1^2 = \frac{124,7666}{6772,0083} \times 12 = 0,2211 \frac{k}{m};$$

$$\omega_1 = 0,4702 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{32,4497}{360,7595} \times 12 = 1,0794 \frac{k}{m};$$

$$\omega_2 = 1,0389 \sqrt{\frac{h}{m}}$$

$$\omega_3^2 = \frac{30,8311}{225,4424} \times 12 = 1,6411 \frac{k}{m};$$

$$\omega_3 = 1,2811 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Modos de vibración:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,7571 \\ 0,4849 \\ 0,2287 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ -0,2083 \\ -0,8125 \\ -0,6457 \end{bmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} -0,3271 \\ 1,0000 \\ 0,4008 \\ -0,3311 \end{bmatrix}$$

Estos resultados particularmente la tercera frecuencia y modo de vibración presentan desviaciones significativas en comparación con los valores exactos.

Por último, se puede proceder al cálculo de las frecuencias y modos de vibración de la estructura real mediante el procedimiento muy simplificado descrito por las igualdades [5.11] a [5.16]. Se obtiene de este modo los resultados siguientes:

i	$\alpha_i$	$p_i$	$p_i (\omega_i^0)^2$	(k/m)	( $\sqrt{k/m}$ )
				$\omega_i^2$	$\omega_i$
1	0,01222	1,28622	0,15486	0,14743	0,384
2	7,00000	0,74650	0,74650	0,7088	0,842
3	9,05004	1,09604	2,57241	2,4440	1,563
4	308,0766	1,10305	3,89443	3,7000	1,924

$$\sum p_i (\omega_i^0)^2 = 7,36775$$

Los modos de vibración son:

$$\underline{\phi}_1 = \underline{m}^{-1/2} \underline{\phi}_1^0$$

con

$$\underline{m}^{-1/2} = \text{diag. } (1,000; 0,707; 0,707; 0,577)$$

es decir

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,6210 \\ 0,4617 \\ 0,2002 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{vmatrix} 1,0000 \\ 0,0000 \\ -0,7071 \\ -0,5744 \end{vmatrix} \quad \phi_3 = \begin{vmatrix} -1,0516 \\ 1,0000 \\ 0,3952 \\ -0,9293 \end{vmatrix}$$

se deduce que este tipo de aproximación sólo puede utilizarse en cálculos preliminares del diseño.

## Ejemplo 2

En este segundo ejemplo se intenta resolver un pórtico plano correspondiente a un edificio de gran altura, estudiado mediante reducción de grados de libertad en (3).

El material considerado es acero con características

$$E = 2,1 \times 10^7 \text{ tm}^{-2}$$

$$\nu = 0,2$$

En la tabla 9 se relacionan las propiedades geométricas de los distintos elementos. El modelo estructural (figura 5) tiene 42 nudos y 60 barras. El peso del edificio se ha supuesto de 18,16 tn por cada piso.

Los pórticos límites se determinan a partir de los resultados de la tabla 5, como estructuras continuas:

$$\lambda = \infty$$

$$\omega_1 = \frac{1}{41} \pi \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,0766 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \frac{3}{41} \pi \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,22990 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_3 = \frac{5}{41} \pi \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,3831 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda = 0$$

$$\omega_1 = 0,0024 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = 0,0151 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_3 = 0,0424 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**TABLA IX**  
**CARACTERISTICAS DE VIGAS Y PILARES**  
**(Ejemplo 2)**

Planta	Vigas		Pilares		$\lambda$
	Area (10 <sup>-4</sup> )	Inercia (10 <sup>-6</sup> )	Area (10 <sup>-4</sup> )	Inercia (10 <sup>-6</sup> )	
1	133	312	150	458	0.2072
2	133	312	150	437	0.2172
3	133	312	150	416	0.2281
4	133	312	150	395	0.2403
5	133	312	150	375	0.2531
6	133	312	150	355	0.2673
7	133	312	150	332	0.2858
8	133	312	150	312	0.3042
9	133	312	150	291	0.3261
10	133	312	150	271	0.3502
11	133	312	150	250	0.3796
12	133	312	150	229	0.4144
13	133	312	150	208	0.4563
14	133	312	150	187	0.5075
15	133	312	150	166	0.5717
16	133	312	150	146	0.6500
17	133	312	150	125	0.7592
18	133	312	150	104	0.9125
19	133	312	150	83	1.1434
20	133	312	150	62	3.0613

NOTA: K = 3,65 m; l = 6.00 m; Valor medio  $\lambda = 0.5768$

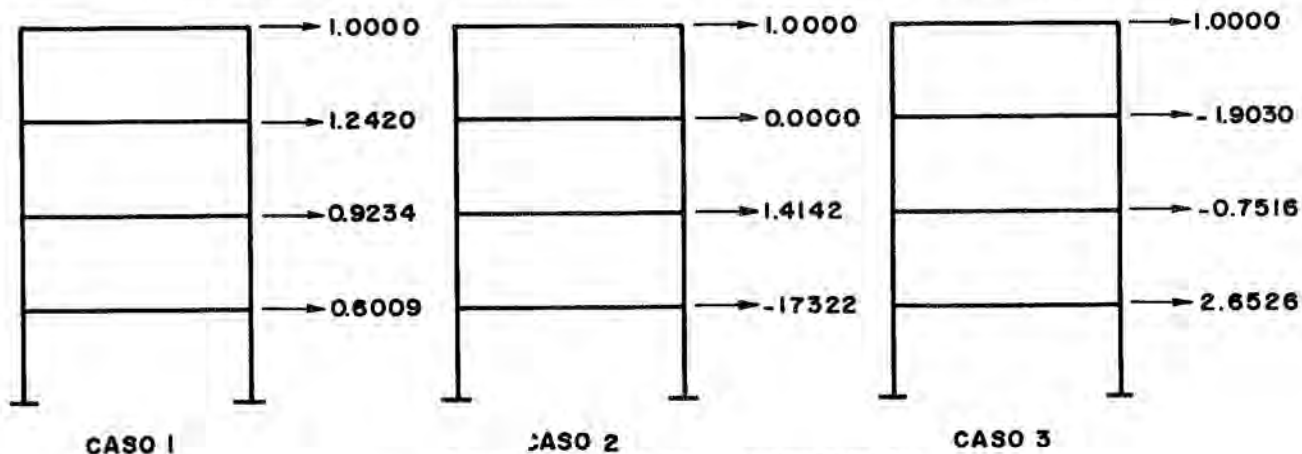


Figura 4.—Casos de carga considerados.

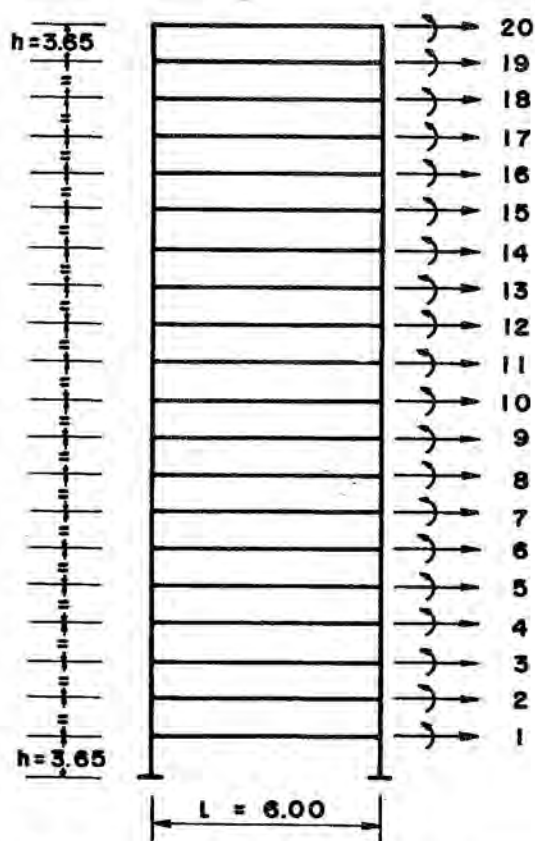


Figura 5. — Estructura edificio de 20 plantas.

Se puede considerar para la interpolación los siguientes valores de  $\beta$  (fórmula 2.4):

$$\beta_1 = 1,2413; \quad \beta_2 = 1,1935; \quad \beta_3 = 1,1427;$$

o bien aplicar, como se ha efectuado en ésta, las fórmulas exactas obtenidas en (1); resultando:

$$\text{Para } \lambda = 0,5768$$

$$\omega_1^0 = 0,0473 \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2^0 = 0,1423 \sqrt{k/m}$$

$$\omega_3^0 = 0,2387 \sqrt{k/m}$$

Los modos de vibración  $\phi_i^0$  se calculan mediante las expresiones [2.5] y se resumen normalizados en la tabla 7. En esta misma tabla se presentan los movimientos horizontales de la estructura bajo la acción de las fuerzas  $\underline{m}^{1/2} \underline{m} \phi_i^0$ , es decir, los vectores

$$\underline{\phi}_i^1 = \underline{k}^{-1} \underline{m}^{1/2} \underline{\phi}_i^0$$

Las matrices  $\underline{m}^*$  y  $\underline{k}^*$  del problema autovalores

$$(\underline{k}^* - \underline{m}^* \omega^*) \underline{q} = 0$$

son:

$$\underline{m}^* = \begin{bmatrix} 0,210280 & -0,029847 & -0,003463 \\ -0,029847 & 0,006410 & -0,000872 \\ 0,003463 & -0,000872 & 0,000313 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^* = \begin{bmatrix} 0,339312 & -0,042864 & -0,004673 \\ -0,042864 & 0,039677 & -0,005128 \\ -0,004673 & -0,005154 & 0,010761 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son:

$$\omega_1 = 1,259; \quad \omega_2 = 3,953; \quad \omega_3 = 7,334$$

que coinciden con los resultados dados en (3):

$$\omega_1 = 0,200 \times 2\pi = 1,257 \text{ (diferencia } -0,2 \%)$$

$$\omega_2 = 0,626 \times 2\pi = 3,933 \text{ (diferencia } -0,5 \%)$$

$$\omega_3 = 1,156 \times 2\pi = 7,263 \text{ (diferencia } 1,0 \%)$$

Los autovectores son:

$$\underline{q}_1 = \begin{bmatrix} 1,000000 \\ -0,145584 \\ 0,028370 \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}_2 = \begin{bmatrix} 0,146928 \\ 1,000000 \\ -0,206626 \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}_3 = \begin{bmatrix} 0,001084 \\ 0,192384 \\ 1,000000 \end{bmatrix}$$

Los modos de vibración de la estructura son:

$$\phi_i = [\phi_i^1 \phi_i^2 \phi_i^3] \underline{q}_i$$

y se representan convenientemente normalizados, de modo que puedan compararse con

TABLA X  
MODOS DE VIBRACION

gld	$\phi_1^0$	$\phi_2^0$	$\phi_3^0$	$\phi_1^1$	$\phi_2^1$	$\phi_3^1$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
1	0,0158	0,0479	0,0800	0,0036	0,0010	0,0006	0,0034	0,0033	0,0000
2	0,0392	0,1163	0,1862	0,0103	0,0028	0,0016	0,0096	0,0093	0,0054
3	0,0632	0,1809	0,2687	0,0183	0,0045	0,0025	0,0171	0,0155	0,0085
4	0,0869	0,2359	0,3113	0,0268	0,0059	0,0030	0,0251	0,0215	0,0106
5	0,1101	0,2780	0,3073	0,0357	0,0068	0,0029	0,0336	0,0267	0,0110
6	0,1326	0,3050	0,2572	0,0449	0,0071	0,0024	0,0424	0,0308	0,0100
7	0,1543	0,3153	0,1685	0,0544	0,0067	0,0014	0,0516	0,0336	0,0078
8	0,1751	0,3084	0,0546	0,0641	0,0056	0,0002	0,0611	0,0349	0,0047
9	0,1944	0,2846	-0,0676	0,0739	0,0037	-0,0012	0,0708	0,0345	0,0007
10	0,2104	0,2453	-0,1796	0,0838	0,0012	-0,0024	0,0807	0,0326	-0,0030
11	0,2369	0,1926	-0,2646	0,0936	-0,0019	-0,0033	0,0905	0,0292	-0,0063
12	0,2521	0,1293	-0,3100	0,1034	-0,0057	-0,0376	0,1005	0,0239	-0,0088
13	0,2657	0,0590	-0,3089	0,1130	-0,0099	-0,0034	0,1104	0,0173	-0,0097
14	0,2778	-0,0145	-0,2614	0,1224	-0,0144	-0,0025	0,1201	0,0096	-0,0094
15	0,2881	-0,0873	-0,1747	0,1315	-0,0192	-0,0009	0,1296	0,0007	-0,0076
16	0,2967	-0,1552	-0,0619	0,1402	-0,0239	0,0013	0,1387	-0,0083	-0,0042
17	0,3035	-0,2147	0,0603	0,1495	-0,0286	0,0037	0,1475	-0,0176	-0,0005
18	0,3084	-0,2625	0,1734	0,1563	-0,0330	0,0062	0,1557	-0,0264	0,0037
19	0,3115	-0,2959	0,2605	0,1635	-0,0369	0,0085	0,1632	-0,0341	0,0076
20	0,3126	-0,3132	0,3086	0,1700	-0,0401	0,0101	0,1700	-0,0401	0,0101

$\phi_1^1$ , en la tabla 10.

La aproximación consistente en suponer  $\underline{m}^*$  y  $\underline{k}^*$  matrices diagonales, y por consiguiente  $\underline{q}_i$  autovectores en todos los elementos nulos excepto uno, conduce a los resultados:

$$\omega_i^2 = \frac{k_{ii}^*}{m_{ii}^*} \quad \phi_i = \phi_i^1$$

es decir:

$$\omega_1 = 1,270; \quad \omega_2 = 2,488; \quad \omega_3 = 5,8652$$

Se observa que la frecuencia y modo fundamentales (primer armónico) es razonablemente apropiado.

## 7. CONCLUSIONES

La deducción de expresiones explícitas de las características dinámicas de edificios regulares, permite su posterior utilización y extensión al cálculo aproximado de otro tipo de estructuras. Estas expresiones explícitas pueden aproximarse mediante una fórmula de interpolación entre las

dos situaciones extremas: edificio de corte y edificio a flexión. Los resultados obtenidos en los ejemplos muestran la bondad de la interpolación presentada.

Por último, los valores de frecuencias y modos de vibraciones de las estructuras regulares pueden servir como inicio de un proceso de análisis dinámico, basado en la técnica de Ritz, de estructuras irregulares no homogéneas.

## REFERENCIAS

1. A. SAMARTIN y L. MORENO.: «Formulas explícitas para el cálculo sísmico de entramados planos regulares». Revista de Obras Públicas. Junio 1986.
2. R. R. GRAIG.: «Structural Dynamics. An Introduction to Computer Methods.» John Wiley and Sons (1981).
3. T. MARTINEZ MARIN.: «Aplicación de la condensación cinemática al análisis dinámico de estructuras». Tesis Doctoral. U.P.M. Madrid (1979).
4. NTE.: Normas Tecnológicas de Edificación. Cálculo. Cargas Sísmicas. (1973).



# APENDICE 1.

## DETERMINACION DE LAS FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACION EN UNA ESTRUCTURA HOMOGenea

El edificio de la figura 2 se puede estudiar mediante la superposición de los elementos básico que se muestran en la figura 6. La matriz de rigidez del elemento básico se deduce a continuación.

Se denomina  $R$  y  $\gamma$  la rigidez y el coeficiente de transmisión del dinten y  $R_1$  y  $\gamma_1$  los respectivos valores de cada pilar interior. El número de vanos es de  $M$ .

Los vectores de movimientos  $\underline{d}$  y fuerzas  $\underline{p}$  en los nudos 1 y 2 del elemento son

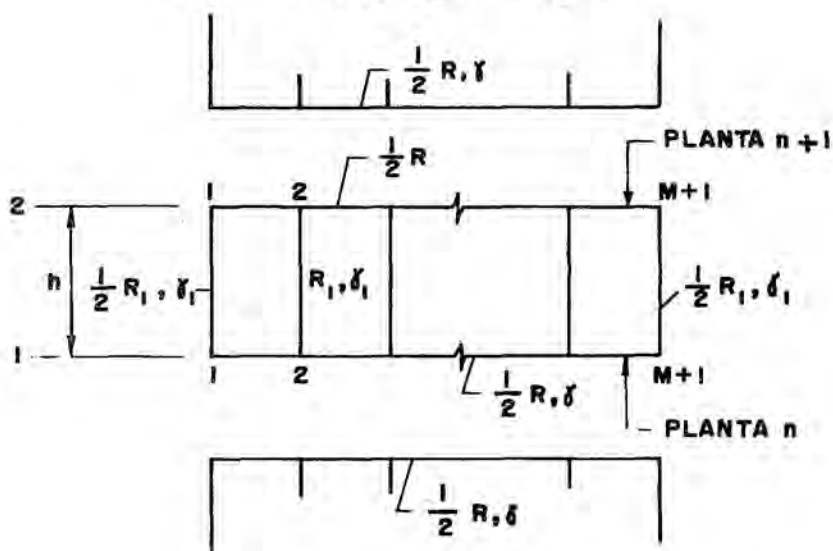
$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad y \quad \underline{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

con

$$\underline{d}_i = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ n_i \end{Bmatrix} \quad y \quad \underline{p}_i = \begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez se define en forma adimensional para las  $M$  células o elementos básicos de una planta:

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{Bmatrix}$$



siendo

$$\bar{p}_1 = \left| \frac{\bar{m}_i}{q_i} \right| = \left| \frac{m_i/h}{q_i} \right|;$$

$$\bar{d}_1 = \left| \frac{\bar{\theta}_i}{u_i} \right| = \left| \frac{\theta_i h}{u_i} \right|$$

$$\bar{k}_{ii} = \begin{vmatrix} \frac{(1+\gamma)\lambda+1}{2(1+\gamma_1)} & \frac{1}{2}(-)^{i+1} \\ \frac{1}{2}(-)^{i+1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{k}_{12} = \bar{k}_{21}^T = \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{2(1+\gamma_1)} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$k = 2 \frac{R_1(1+\gamma_1)}{h^2} M \quad y \quad \lambda = \frac{R}{R_1}$$

El equilibrio dinámico de la planta n-sima es:

$$\bar{k}_{21} \bar{d}_{N-1} + (\bar{k}_{22} + \bar{k}_{11}) \bar{d}_N + \bar{k}_{12} \bar{d}_{N+1} = -m \ddot{\bar{d}}_N \quad [A.1]$$

con  $m$  matriz de masas y  $(\cdot) \equiv \frac{d(\cdot)}{dt}$

Para la planta última se obtiene:

$$\bar{k}_{21} \bar{d}_{N-1} + \bar{k}_{22} \bar{d}_N = 0$$

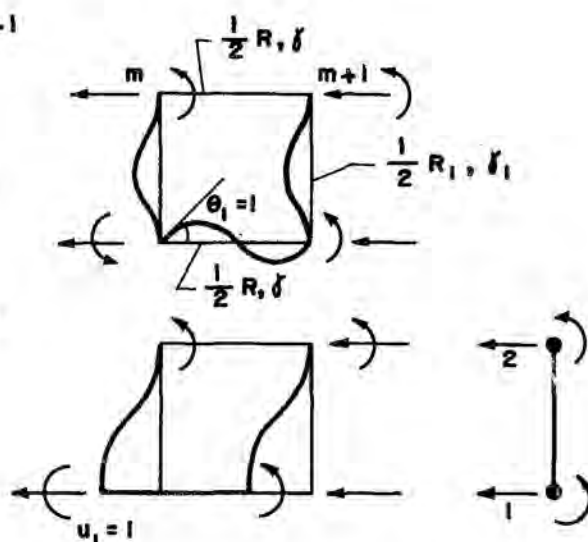


Figura 6.—Elemento básico del entramado plano.

es decir, la condición de borde es:

$$\bar{k}_{11} \bar{d}_N + \bar{k}_{12} \bar{d}_{N+1} = 0$$

con lo que resulta

$$\bar{d}_{N+1} = -\bar{k}_{12}^{-1} \bar{k}_{11} \bar{d}_N = \underline{T} \bar{d}_N \quad [A.2]$$

siendo

$$\underline{T} = \begin{vmatrix} 2\lambda \frac{1+\gamma}{1-\gamma} + 1 & 0 \\ \lambda \frac{1+\gamma}{1-\gamma} + 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\nu_3 + 1 & 0 \\ \nu_3 + 1 & 1 \end{vmatrix}$$

En el caso particular de  $\lambda = 0$  se deduce

$$\underline{T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ es decir:}$$

$$\bar{d}_{N+1} = \bar{d}_N; \quad u_{N+1} = u_N + \bar{d}_N$$

Para la primera planta la ecuación de equilibrio suponiendo empotramiento total en la cimentación, es:

$$(\bar{k}_{22} + \bar{k}_{11}) \bar{d}_1 + \bar{k}_{12} \bar{d}_2 = 0$$

con lo que resulta la siguiente ecuación de contorno:

$$\underline{d}_0 = 0 \quad [A.3]$$

La resolución de la ecuación en diferencias (A.1) con las condiciones de contorno (A.2) y (A.3) puede llevarse a cabo de acuerdo con el desarrollo expuesto en [1] obteniéndose la ecuación característica, expresada en forma de anulación del determinante siguiente:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - 2 \nu_3 (\lambda_1 S_N + \lambda_2 S_N)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 [B_1 - B_2 - 2 \nu_3 (C_N - c_N)]$$

$$B_1 - B_2 - (\nu_3 + 1) (\lambda_1 S_N + \lambda_2 S_N)$$

$$\lambda_2 A_1 - \lambda_1 A_2 - (\nu_3 + 1) \lambda_1 \lambda_2 (C_N - c_N)$$

La ecuación anterior permite calcular las sucesivas frecuencias de la estructura.

La notación corresponde a la utilizada en el texto del artículo.

Avelino Samartín Quiroga



Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1963). Catedrático y Director del Departamento de Análisis de la Estructuras de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos de Santander. Vocal de la Junta Directiva de la Asociación Española de Ingeniería Sísmica.

Luis Moreno García



Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1971). Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad de Santander (1984). Profesor titular del Departamento de Análisis de las Estructuras de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos de Santander.